

Geometrija 3 rešenja roka jun 2

1. Data je kriva $\alpha(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2})$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

- (a) Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje na jediničnoj sferi opisuje vrh tangentnog vektora krive α čiji je početak transliran u koordinatni početak.
- (b) Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje su na rastojanju $4a^2\kappa$ duž glavne normale od krive α .

Rešenje. Iz uslova dela (a) sledi da je tražena kriva data sa $\beta(t) = T(t)$, gde je $T(t)$ tangentni vektor krive α . Kako je $\alpha'(t) = a(1 - \cos t, \sin t, 2 \cos \frac{t}{2})$, dobijamo $\|\alpha'(t)\| = 2a$, pa je

$$\beta(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\sin^2 \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\|T(t)\| = 1$, kriva β leži na jediničnoj sferi sa centrom u koordinatnom početku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Takođe, zbog $\sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos^2 \frac{t}{2}$ imamo da kriva β leži i na paraboličkom cilindru $x = 1 - z^2$. Zamenom u jednačinu sfere dobijamo da Dekartove koordinate x i y krive β zadovoljavaju jednačinu $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, pa kriva β leži i na kružnom cilindru. Dakle, β je Vivijanijeva kriva, koja se sastoji iz dva podudarna dela po kojima kružni (ili analogno parabolički) cilindar "probija" sferu - jedan u poluprostoru $z > 0$ (za $t \in (-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$), drugi u $z < 0$ (za $t \in (\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi)$), spajaju se u tački $(1, 0, 0)$ (za $t = \pi + 2k\pi$).

Iz uslova dela (b) sledi da je tražena kriva data sa $\gamma(t) = \alpha(t) + 4a^2\kappa(t)N(t)$, gde je $N(t)$ vektor glavne normale krive α , a $\kappa(t)$ krivina krive α . Iako je moguće krivu α eksplicitno parametrizovati prirodnim parametrom, lakše je iskoristiti formule za proizvoljno parametrizovanu krivu, pa dobijamo

$$\kappa(t) = \frac{1}{4a} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}, \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}} \left(\sin t, \cos t, -\sin \frac{t}{2} \right),$$

$$\gamma(t) = a \left(t, 1, 3 \sin \frac{t}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, γ je sinusoida $z = 3a \sin \frac{x}{2a}$ koja leži u ravni $y = a$.

2. Neka je $\mathcal{M}$ površ dobijena rotacijom regularne C^∞ krive $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $f > 0$, $t \in \mathbb{R}$, oko z -ose.

- (a) Neka je γ proizvoljna prirodno parametrizovana geodezijska na površi $\mathcal{M}$ i φ oštar ugao koji kriva γ zaklapa sa paralelom poluprečnika R . Dokazati da važi $R \cos \varphi = \text{const}$.
- (b) Odrediti površ $\mathcal{M}$ kod koje su sve koordinatne linije geodezijske.

Rešenje. Parametrizacija površi $\mathcal{M}$ (bez jednog meridijana) glasi

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi).$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme ove površi glase

$$[I] = \begin{pmatrix} f'^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}.$$

Kako je $u = t$ zapravo parametar profilne krive α , možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je to njen prirodni parametar (a samim tim ujedno prirodni parametar svakog meridijana $v = v_0$). Tada je $f'^2 + g'^2 = 1$, pa matrica prve forme i Kristofelovi simboli imaju malo jednostavniji oblik (mada ovaj korak nije neophodan za rešenje zadatka)

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{22}^1 = -ff' \\ \Gamma_{11}^2 = 0 & \Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f} & \Gamma_{22}^2 = 0. \end{matrix}$$

Paralele imaju jednačinu $u = u_0$, pa je njihova parametrizacija $\beta(v) = r(u_0, v) = (f(u_0) \cos v, f(u_0) \sin v, g(u_0))$, $v \in (0, 2\pi)$. U pitanju su naravno krugovi poluprečnika $R = f(u_0)$, koji leže u ravni $z = g(u_0)$. Geodezijska linija $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ parametrizovana prirodnim parametrom s zadovoljava uslov $u'^2 + f^2 v'^2 = 1$, kao i sistem diferencijalnih jednačina geodezijskih linija

$$\begin{aligned} u'' - ff'v'^2 &= 0, \\ v'' + 2\frac{f'}{f}u'v' &= 0. \end{aligned}$$

Primitimo da je druga jednačina ekvivalentna jednačini $v''f^2 + 2ff'u'v' = 0$. Leva strana poslednje jednačine predstavlja upravo izvod funkcije f^2v' , pa zaključujemo da je $(f^2v')' = 0$, odnosno $f^2v' = \text{const}$ duž geodezijske linije γ . Takođe, kako je $\beta' = (0, 1) = r_v$ i $\gamma' = (u', v') = u'r_u + v'r_v$, za ugao između ovih krivih važi

$$\cos \varphi = \frac{I(\beta', \gamma')}{\sqrt{I(\beta', \beta')} \sqrt{I(\gamma', \gamma')}} = \frac{f^2v'}{f} = f v'.$$

U presečnoj tački krivih je $R = f$, pa je $R \cos \varphi = f^2v' = \text{const}$, čime je dokaz dela (a) završen.

Na rotacionoj površi su svi meridijani $\alpha(u) = r(u, v_0)$ geodezijske jer su prirodno parametrizovani i važi $u' = 1$, $u'' = v' = v'' = 0$, pa ove krive zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina geodezijskih linija. Naravno, može se dokazati da su svi meridijani u normalnim sečenjima rotacione površi, pa su samim tim geodezijske. Za paralele $\beta(v) = r(u_0, v)$ ne smemo menjati $u' = u'' = v'' = 0$ i $v' = 1$ u sistem jer ne znamo da li je parametar v prirodni parametar za paralele. Zato, neka je paralela parametrizovana prirodnim parametrom s , tj. $\beta(s) = r(u_0, v(s))$ i važi $\beta' = (0, v') = v'r_v$, $f^2v' = 1$. Primitimo da za prirodni parametar s kruga β važi $s = vf(u_0)$, odnosno $v(s) = \frac{s}{f(u_0)}$. I pored reparametrizacije kruga β važi i dalje $u' = u'' = 0$, pa se sistem jednačina geodezijskih svodi na $ff'v'^2 = 0$ i $v'' = 0$. Kako želimo da ovaj sistem bude zadovoljen nezavisno od posmatrane paralele $u = u_0$, mora biti $v' = \text{const}$ i $f'(u_0) = 0$, odnosno $f = \text{const} = f_0$ (tj. vrednost funkcije f ne zavisi od posmatrane paralele $u = u_0$). Isti zaključak dobijamo i koristeći rezultat zadatka 2.19 sa vežbi, naime na ovakvoj površi je v -parametarska kriva geodezijska ako i samo ako je $G_u(u_0) = 2f(u_0)f'(u_0) = 0$, tj. $f'(u_0) = 0$. Kako ovo mora da važi za svaku paralelu, odnosno u svakoj tački u_0 , dobijamo da je $f = \text{const}$.

Dakle, profilna kriva $\alpha(t) = (f_0, 0, g(t))$ (a samim tim i svi meridijani) predstavlja pravu paralelnu z -osi, pa je površ $\mathcal{M}$ kružni cilindar.

3. Dato je sedlo $z = xy$.

- (a) Odrediti glavne krivine, Gausovu, srednju i normalnu krivinu, kao i tip svih tačaka na sedlu.
- (b) Odrediti glavne i asimptotske pravce sedla. Odrediti jednačine asimptotskih linija, kao i glavnih linija koje sadrže tačku $(0, 0, 0)$.

Rešenje. Parametrizacija sedla (kao grafika glatke funkcije) glasi

$$r(u, v) = (u, v, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Koeficijenti prve i druge fundamentalne forme glase:

$$\begin{aligned} r_u &= (1, 0, v), \quad r_v = (0, 1, u), \\ r_u \times r_v &= (-v, -u, 1), \quad n = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}(-v, -u, 1), \\ r_{uu} &= (0, 0, 0), \quad r_{uv} = (0, 0, 1), \quad r_{vv} = (0, 0, 0) \\ [I] &= \begin{pmatrix} v^2 + 1 & uv \\ uv & u^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad [II] = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Glavne krivine su sopstvene vrednosti matrice

$$[I]^{-1} \cdot [II] = \begin{pmatrix} \frac{-uv}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}} & \frac{u^2+1}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}} \\ \frac{v^2+1}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}} & \frac{-uv}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}} \end{pmatrix},$$

tj. predstavljaju rešenja kvadratne jednačine $\kappa^2 + \frac{2uv}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}}\kappa - \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} = 0$ iznose $\kappa_{1,2} = \frac{-uv \pm \sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}}$. Gausova krivina površi iznosi $K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{-1}{(u^2+v^2+1)^2}$, a srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{-uv}{\sqrt{(u^2+v^2+1)^3}}$. Kako je $K < 0$, sve tačke na sedlu su hiperboličke.

Neka je v_p proizvoljni pravac u proizvoljnoj tački p sedla. Ako predstavimo vektor $v_p = ar_u + br_v$ ($(a, b) \neq (0, 0)$) u bazi $[r_u, r_v]$ tangentne ravni, imamo da je normalna krivina jednaka (u, v su vrednosti parametara za tačku p)

$$\kappa_n(v_p) = \frac{\Pi(v_p, v_p)}{I(v_p, v_p)} = \frac{a^2e + 2abf + b^2g}{a^2E + 2abF + b^2G} = \frac{\frac{2ab}{\sqrt{u^2+v^2+1}}}{a^2(v^2+1) + 2abuv + b^2(u^2+1)}.$$

Kako su sve tačke na sedlu hiperboličke, nema umbiličkih tačaka. Samim tim glavni pravci $v_p = ar_u + br_v$ mogu se odrediti kao sopstveni vektori matrice $[I]^{-1} \cdot [II]$ ili kao rešenja jednačine

$$\begin{vmatrix} -b^2 & ab & -a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Na bilo koji od ovih načina dobijamo da je $b = \pm a\sqrt{\frac{v^2+1}{u^2+1}}$, pa su glavni pravci (do na množenje skalarom) vektori $v_p = \sqrt{u^2+1}r_u \pm \sqrt{v^2+1}r_v$.

Za asimptotske pravce važi $\Pi(v_p, v_p) = 0$, odnosno $a^2e + 2abf + b^2g = 0$, pa zamenom konkretnih vrednosti dobijamo da su asimptotski pravci zapravo pravci r_u i r_v . Naravno, i očekivali smo dva asimptotska pravca jer su sve tačke na površi hiperboličke.

U tački $(0,0,0)$ važi $u = v = 0$, pa je $E = G = f = 1$, $F = e = g = 0$. Glavne linije $r(u(t), v(t))$ zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu

$$\begin{vmatrix} -v'^2 & u'v' & -u'^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

koja se svodi na $v' = \pm u'$, odnosno $v = \pm u + C$, $C = \text{const}$. Kako ova kriva sadrži tačku $(0,0,0)$, mora biti $C = 0$, pa su glavne linije kroz tačku $(0,0,0)$ dve parabole $(u, \pm u, u^2)$, $u \in \mathbb{R}$. Lako se proverava da su ove krive zaista glavne linije na celoj površi (do sada smo samo nametnuli uslove za tačku $(0,0,0)$) jer je jednačina

$$\begin{vmatrix} -v'^2 & u'v' & -u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

identički zadovoljena duž ovih krivih $v = \pm u$ zbog $v' = \pm u'$.

Asimptotske linije $r(u(t), v(t))$ su rešenja diferencijalne jednačine $eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0$. Kako je $e = g = 0$ i $f > 0$, ova jednačina se svodi na $u' = 0$ ili $v' = 0$, pa su rešenja krive $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, tj. koordinatne linije.

4. Date su površi

$$\begin{aligned} f(s, t) &= (s \cos t, s \sin t, t), & s \in \mathbb{R}, t \in (0, 2\pi), \\ r(u, v) &= (\text{ch } u \cos v, \text{ch } u \sin v, u), & u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

(a) Dokazati da su date površi izometrične.

(b) Dokazati da su koordinate na površi f dobijene ovom izometrijom konformne. Odrediti jednačine krivih na toj površi koje polove ugao između koordinatnih linija.

Rešenje. Označimo skupove parametara datih površi (helikoida f i katenoida r) sa $(s, t) \in \mathcal{S} = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ i $(u, v) \in \mathcal{U} = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, a izometriju $\sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ formulama $s = g(u, v)$, $t = h(u, v)$. Tražimo funkcije g i h takve da koeficijenti prve fundamentalne forme površi $r(u, v)$ i $\tilde{f}(u, v) = (f \circ \sigma)(u, v) = f(s(u, v), t(u, v))$ budu jednaki. Kako je

$$[\mathbb{I}]_r = \begin{pmatrix} \text{ch}^2 u & 0 \\ 0 & \text{ch}^2 u \end{pmatrix}, \quad [\mathbb{I}]_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} g_u^2 + (g^2 + 1)h_u^2 & g_u g_v + (g^2 + 1)h_u h_v \\ g_u g_v + (g^2 + 1)h_u h_v & g_v^2 + (g^2 + 1)h_v^2 \end{pmatrix},$$

dobijamo da su odgovarajući koeficijenti jednaki ukoliko važi $g(u, v) = \text{sh } u$, $h(u, v) = v$ ($g_u = \text{ch } u$, $g_v = h_u = 0$, $h_v = 1$).

Dakle, reparametrizacija površi f dobijena ovom izometrijom glasi

$$\tilde{f}(u, v) = (\text{sh } u \cos v, \text{sh } u \sin v, v), \quad u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi).$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme ovako parametrizovanog helicoida su

$$[\mathbb{I}]_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \text{ch}^2 u & 0 \\ 0 & \text{ch}^2 u \end{pmatrix}.$$

Kako je $E_{\tilde{f}} = G_{\tilde{f}}$, $F_{\tilde{f}} = 0$, koordinate (u, v) na helicoidu jesu konformne, pa se čuvaju uglovi iz karte. Jednačine krivih koje polove ugao između koordinatnih linija $u = \text{const}$ i $v = \text{const}$ helicoida mogu se dobiti kao slike krivih koje polove ugao između koordinatnih linija u karti. Te krive u karti imaju oblik $v = \pm u + \text{const}$ (prave koje seku u -osu pod uglom $\frac{\pi}{4}$ ili $\frac{3\pi}{4}$), a na helicoidu parametrizaciju

$$\alpha(u) = (\text{sh } u \cos(\pm u + \text{const}), \text{sh } u \sin(\pm u + \text{const}), \pm u + \text{const}), \quad u \in \mathbb{R},$$

ili

$$\alpha(v) = (\text{sh } (\pm v + \text{const}) \cos v, \text{sh } (\pm v + \text{const}) \sin v, v), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Naravno, tražene krive moguće je naći i rešavanjem odgovarajuće diferencijalne jednačine koja se dobija postavljanjem uslova da je ugao između krive α i jedne od familija koordinatnih linija jednak $\frac{\pi}{4}$ ili $\frac{3\pi}{4}$.